



# Predstavitev Metode Končnih Elementov (MKE)

Pripravili: **Janez, Urevc**, Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani (FS UL)

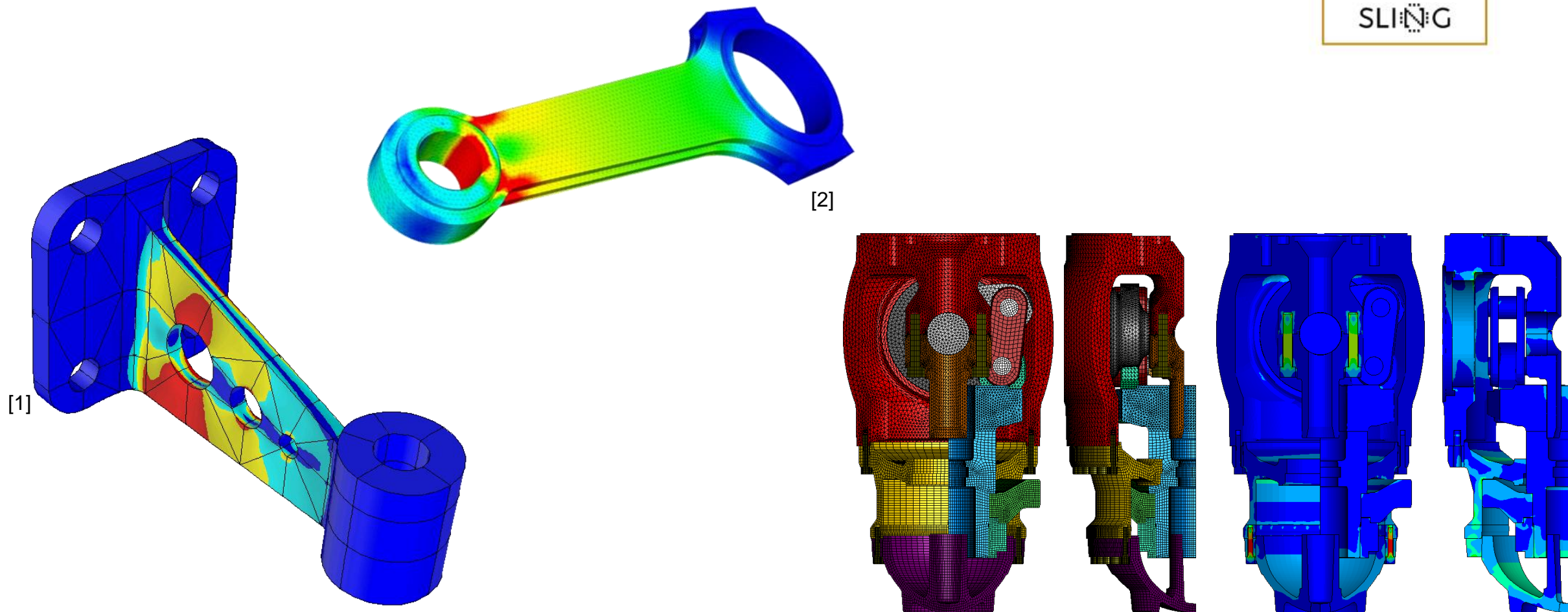
Miroslav, Halilovič, FS UL

Bojan, Starman, FS UL

Nikolaj, Mole, FS UL

Dne: 09-02-2022

# Kaj je MKE?



[1] <https://manisuri.umbc.edu/what-are-finite-elements/>  
[2] <https://www.simscale.com/blog/2016/10/what-is-finite-element-method/>

# Kaj je MKE?



## **Metoda Končnih Elementov:**

- je numerična metoda za določitev aproksimativne rešitve robnega problema.

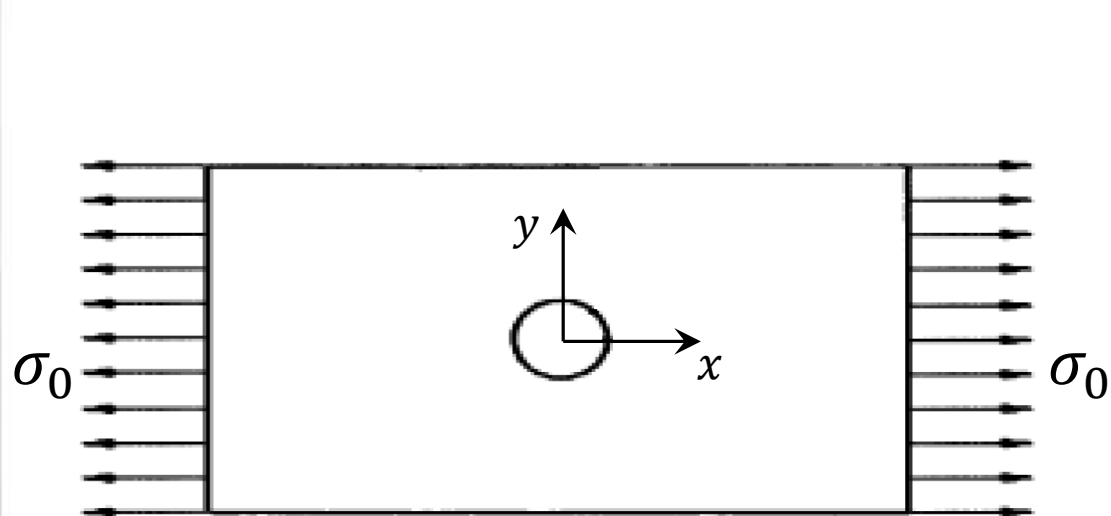
# Kaj je MKE?



Vodilna dif.  
enačba

$$\int_{\Omega} \dots + \int_{\Gamma} \dots = 0$$

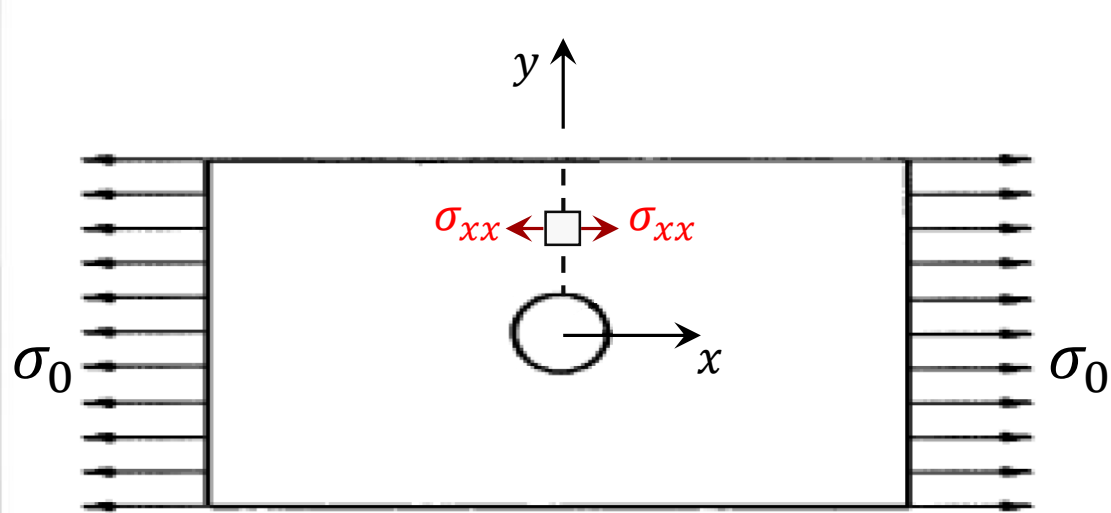
# Kaj je MKE?



Vodilna dif.  
enačba

$$\int_{\Omega} \dots + \int_{\Gamma} \dots = 0$$

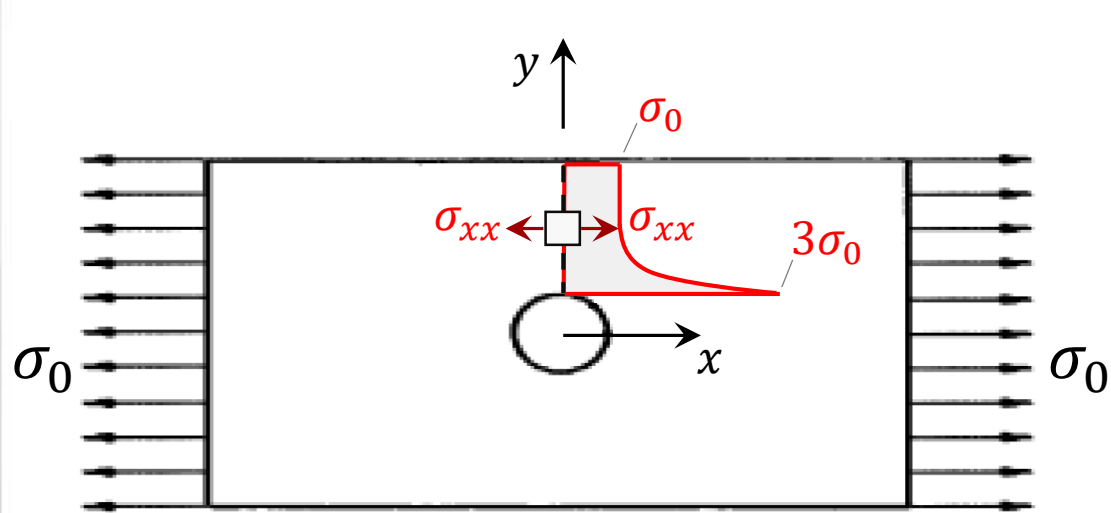
# Kaj je MKE?



Vodilna dif.  
enačba

$$\int_{\Omega} \dots + \int_{\Gamma} \dots = 0$$

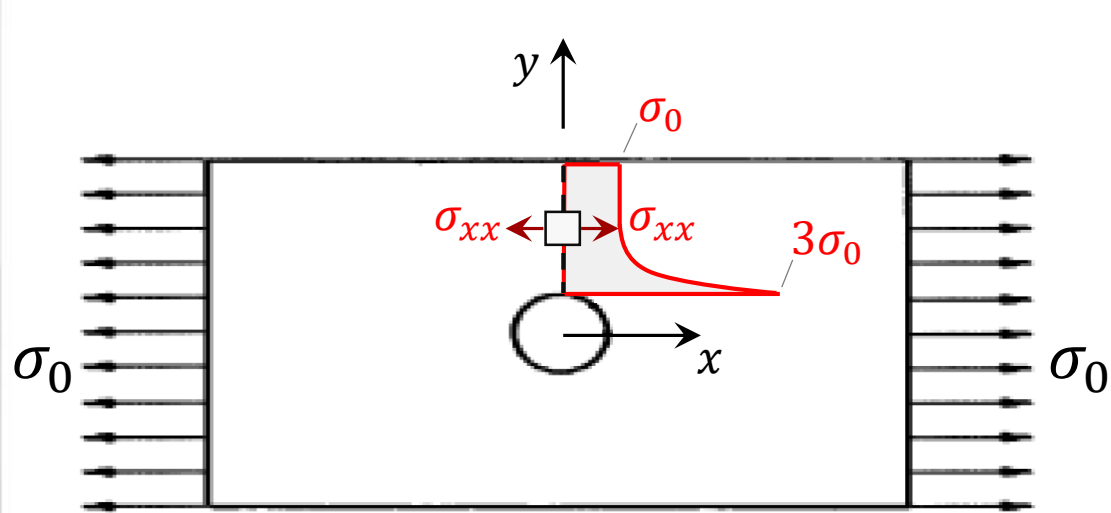
# Kaj je MKE?



Vodilna dif.  
enačba

$$\int_{\Omega} \dots + \int_{\Gamma} \dots = 0$$

# Kaj je MKE?



Vodilna dif. enačba

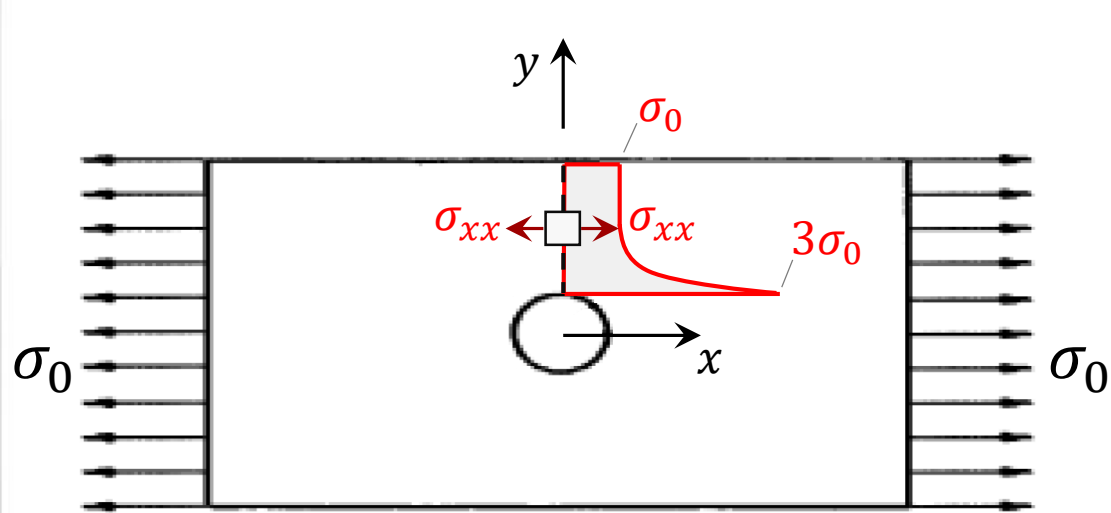
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{u})$$

$$\int_{\Omega} \dots + \int_{\Gamma} \dots = 0$$

... določiti želimo  $\mathbf{u}(x,y)$



# Kaj je MKE?



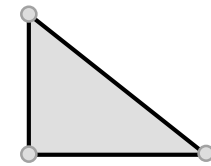
Vodilna dif. enačba

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{u})$$

$$\int_{\Omega} \dots + \int_{\Gamma} \dots = 0$$

... določiti želimo  $\mathbf{u}(x,y)$

$$c_0 + c_1x + c_2y$$

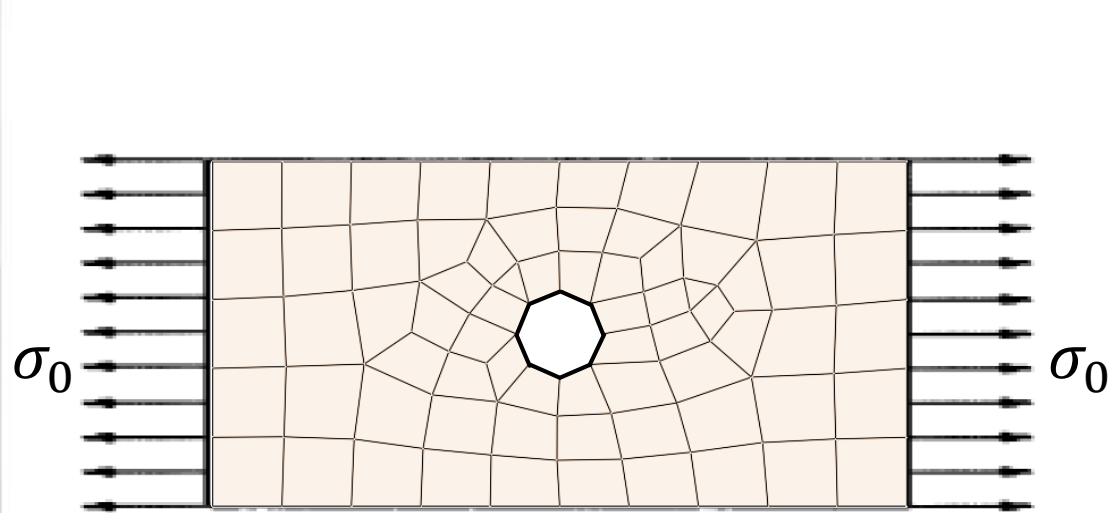


$$\sigma_{ij} \propto \nabla \mathbf{u}$$

$$c_0 + c_1x + c_2y + c_3xy$$



# Kaj je MKE?



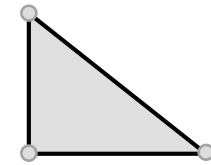
Vodilna dif.  
enačba

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{u})$$

$$\int_{\Omega} \dots + \int_{\Gamma} \dots = 0$$

... določiti želimo  $\mathbf{u}(x,y)$

$$c_0 + c_1x + c_2y$$

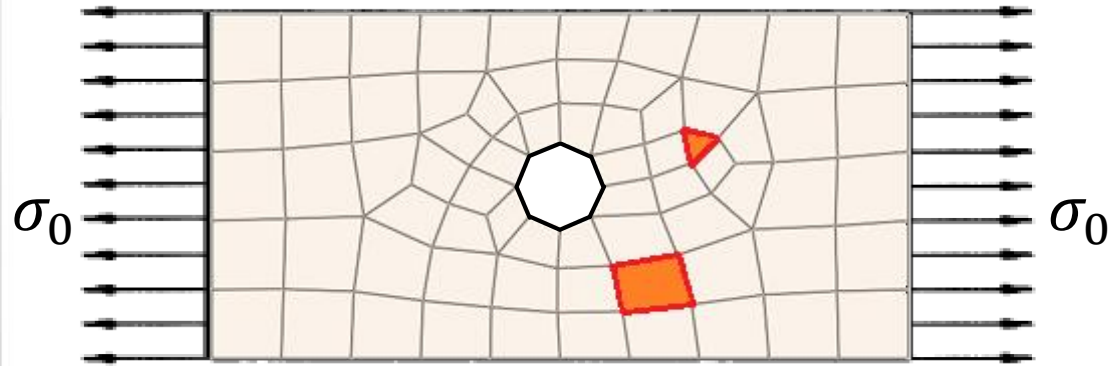


$$\sigma_{ij} \propto \nabla \mathbf{u}$$

$$c_0 + c_1x + c_2y + c_3xy$$



# Kaj je MKE?



Vodilna dif. enačba

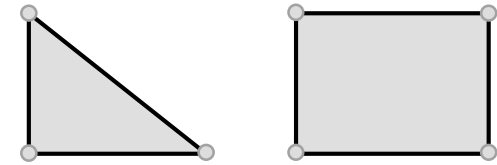
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{u})$$

$$\int_{\Omega} \dots + \int_{\Gamma} \dots = 0$$

... določiti želimo  $\mathbf{u}(x,y)$

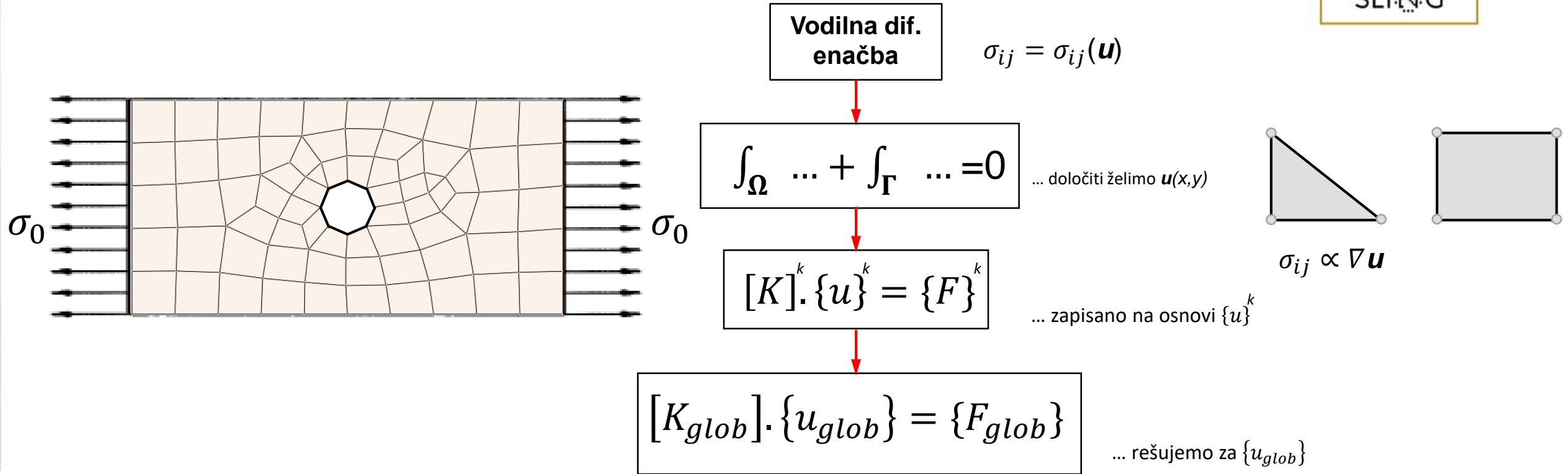
$$[K]^k \cdot \{u\}^k = \{F\}^k$$

... zapisano na osnovi  $\{u\}^k$

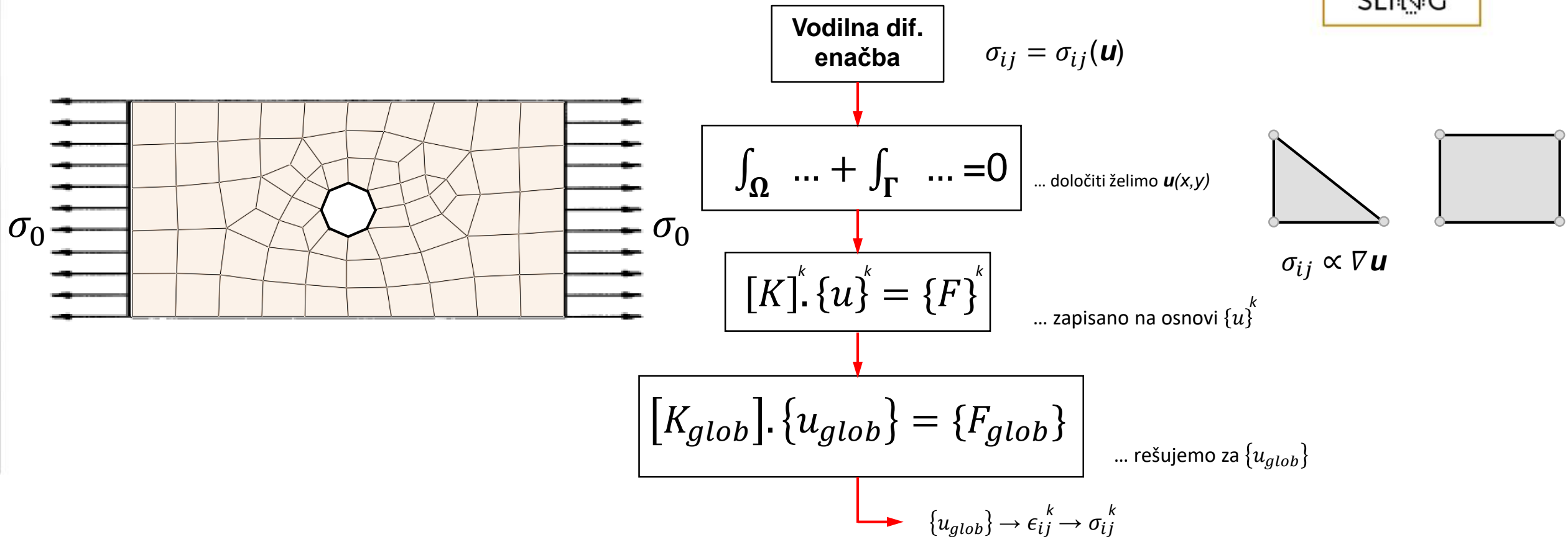


$$\sigma_{ij} \propto \nabla \mathbf{u}$$

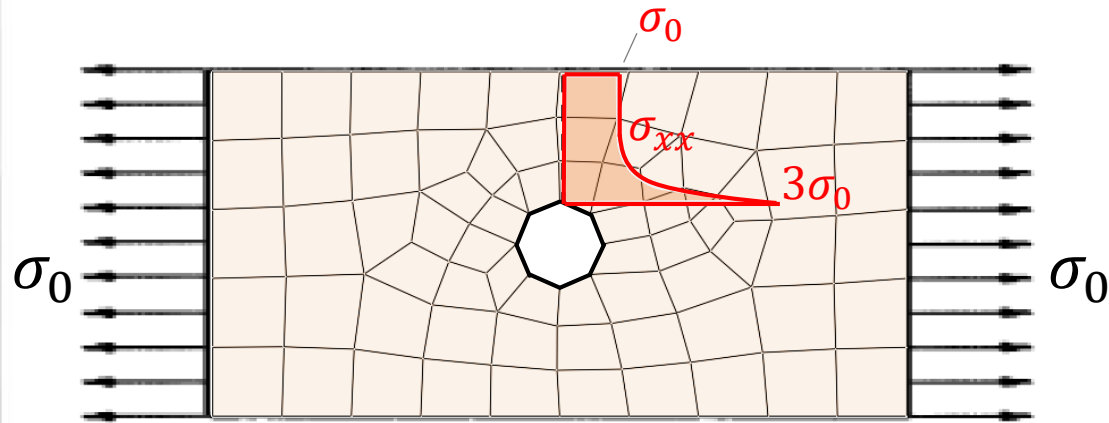
# Kaj je MKE?



# Kaj je MKE?



# Kaj je MKE?



Vodilna dif. enačba

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{u})$$

$$\int_{\Omega} \dots + \int_{\Gamma} \dots = 0$$

... določiti želimo  $\mathbf{u}(x,y)$

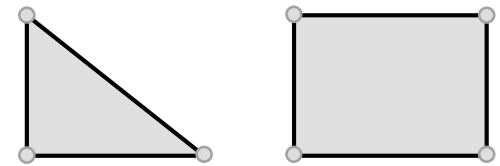
$$[K]^k \cdot \{u\}^k = \{F\}^k$$

... zapisano na osnovi  $\{u\}^k$

$$[K_{glob}] \cdot \{u_{glob}\} = \{F_{glob}\}$$

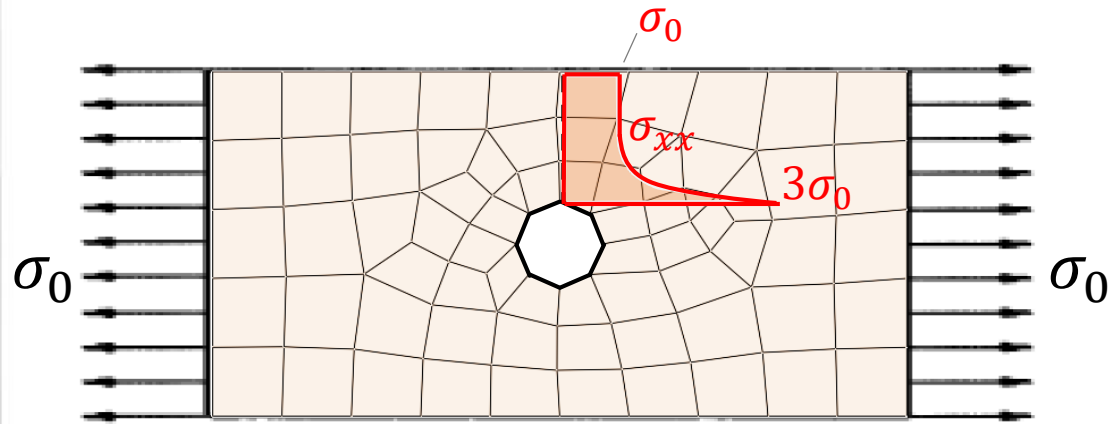
... rešujemo za  $\{u_{glob}\}$

$$\{u_{glob}\} \rightarrow \epsilon_{ij}^k \rightarrow \sigma_{ij}^k$$



$$\sigma_{ij} \propto \nabla \mathbf{u}$$

# Kaj je MKE?



Vodilna dif. enačba

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{u})$$

$$\int_{\Omega} \dots + \int_{\Gamma} \dots = 0$$

... določiti želimo  $\mathbf{u}(x,y)$

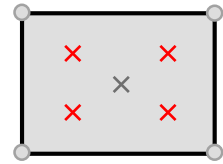
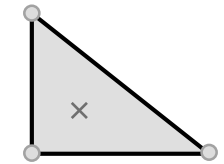
$$[K]^k \cdot \{u\}^k = \{F\}^k$$

... zapisano na osnovi  $\{u\}^k$

$$[K_{glob}] \cdot \{u_{glob}\} = \{F_{glob}\}$$

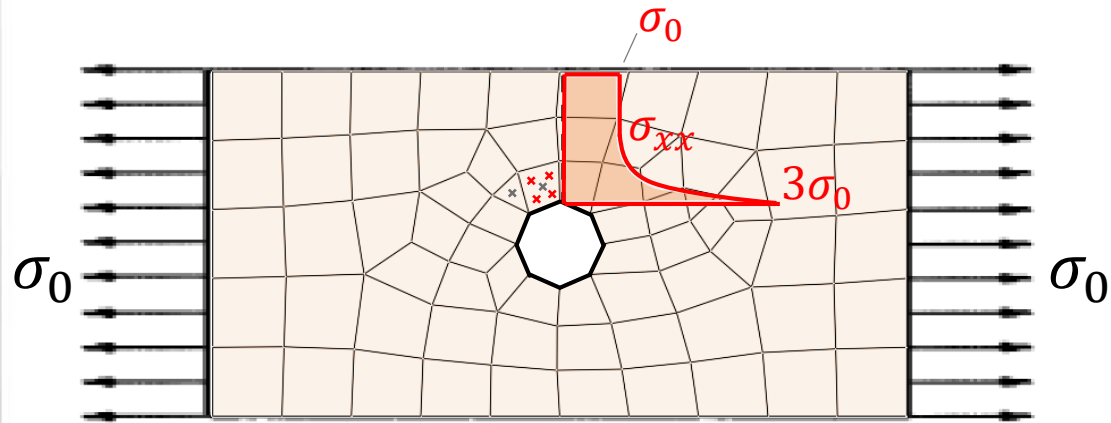
... rešujemo za  $\{u_{glob}\}$

$$\{u_{glob}\} \rightarrow \epsilon_{ij}^k \rightarrow \sigma_{ij}^k$$



$$\sigma_{ij} \propto \nabla \mathbf{u}$$

# Kaj je MKE?



Vodilna dif. enačba

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{u})$$

$$\int_{\Omega} \dots + \int_{\Gamma} \dots = 0$$

... določiti želimo  $\mathbf{u}(x,y)$

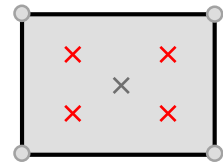
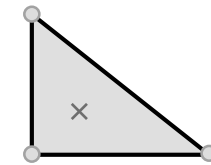
$$[K]^k \cdot \{u\}^k = \{F\}^k$$

... zapisano na osnovi  $\{u\}^k$

$$[K_{glob}] \cdot \{u_{glob}\} = \{F_{glob}\}$$

... rešujemo za  $\{u_{glob}\}$

$$\{u_{glob}\} \rightarrow \epsilon_{ij}^k \rightarrow \sigma_{ij}^k$$



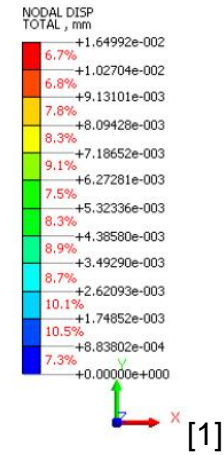
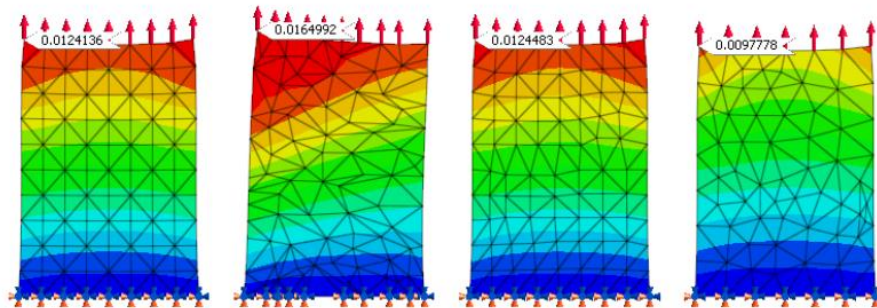
$$\sigma_{ij} \propto \nabla \mathbf{u}$$



# Kaj je MKE?



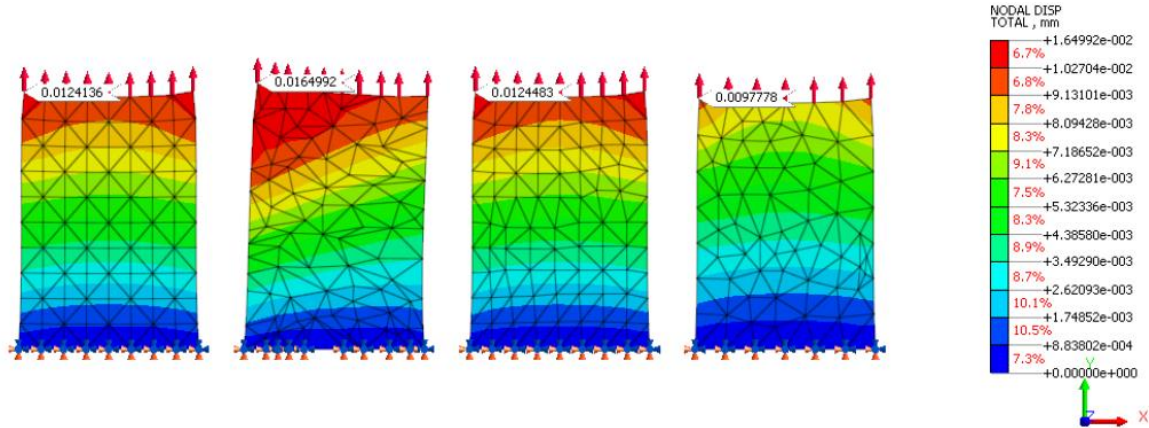
pomiki



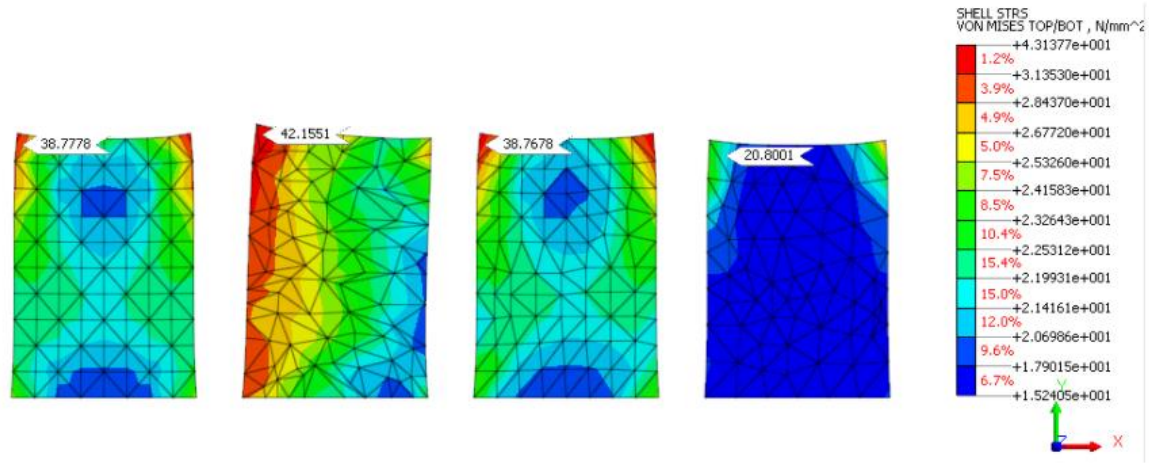
# Kaj je MKE?



pomiki



Primerjalna napetost



[1]



# Primeri uporabe MKE



- Strojništvo/Letalstvo/Gradbeništvo/Avtomobilaska industrija
- Strukturne/Napetostne Analize
  - Statične/Dinamične
  - Linearne/Nelinearne
- Tok tekočin
- Prevod toplote
- Elektromagnetizem
- Mehanika zemljin
- Biomehanika

# Primeri uporabe MKE

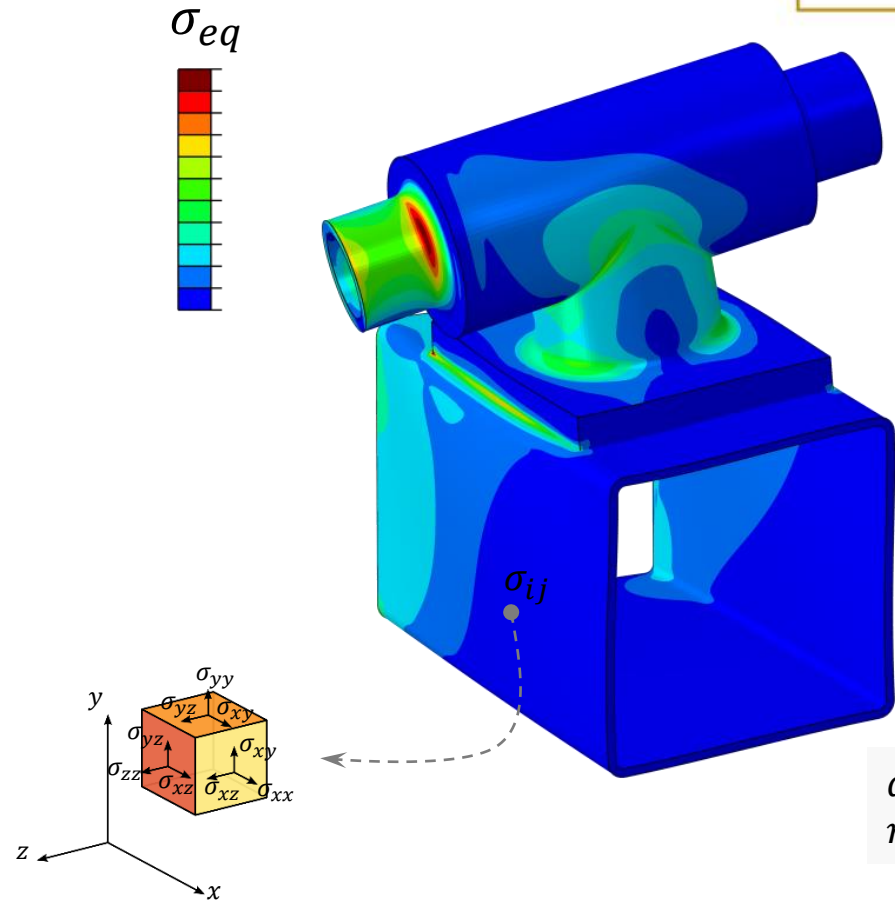
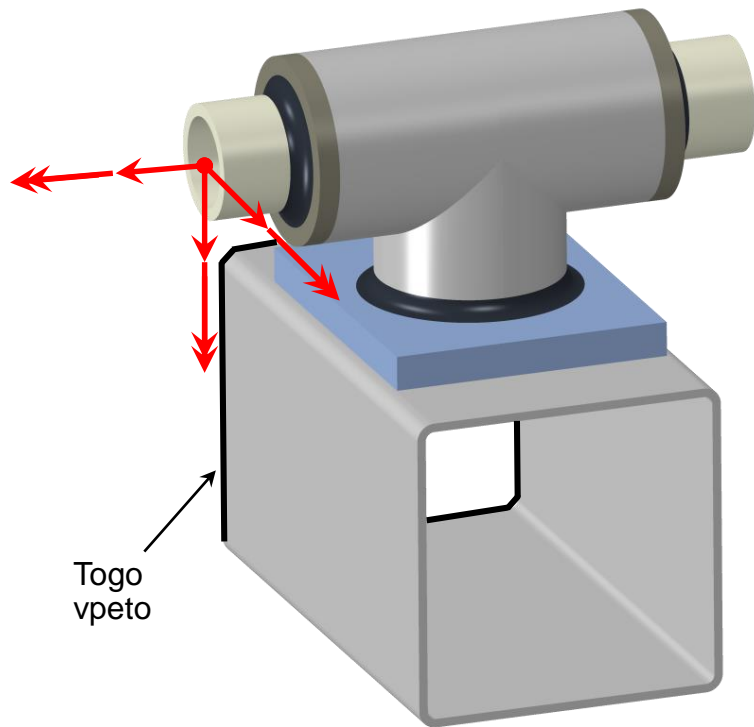


- Strojništvo/Letalstvo/Gradbeništvo/Avtomobilska industrija
- **Strukturne/Napetostne Analize**
  - **Statične/Dinamične**
  - Linearne/Nelinearne
- **Tok tekočin**
- **Prevod toplote**
- Elektromagnetizem
- Mehanika zemljin
- **Biomehanika**

# Primeri uporabe MKE



## Statične napetostne analize

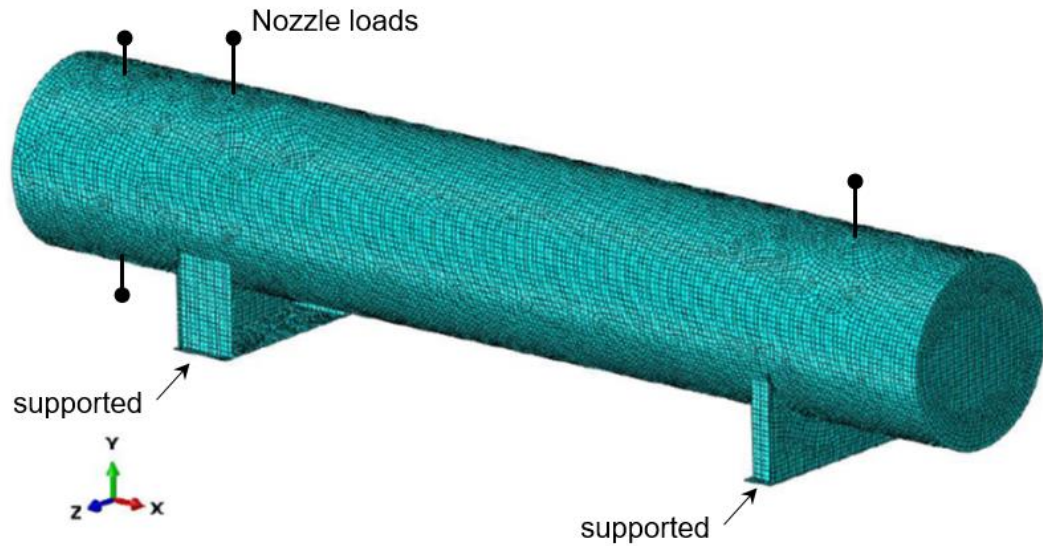




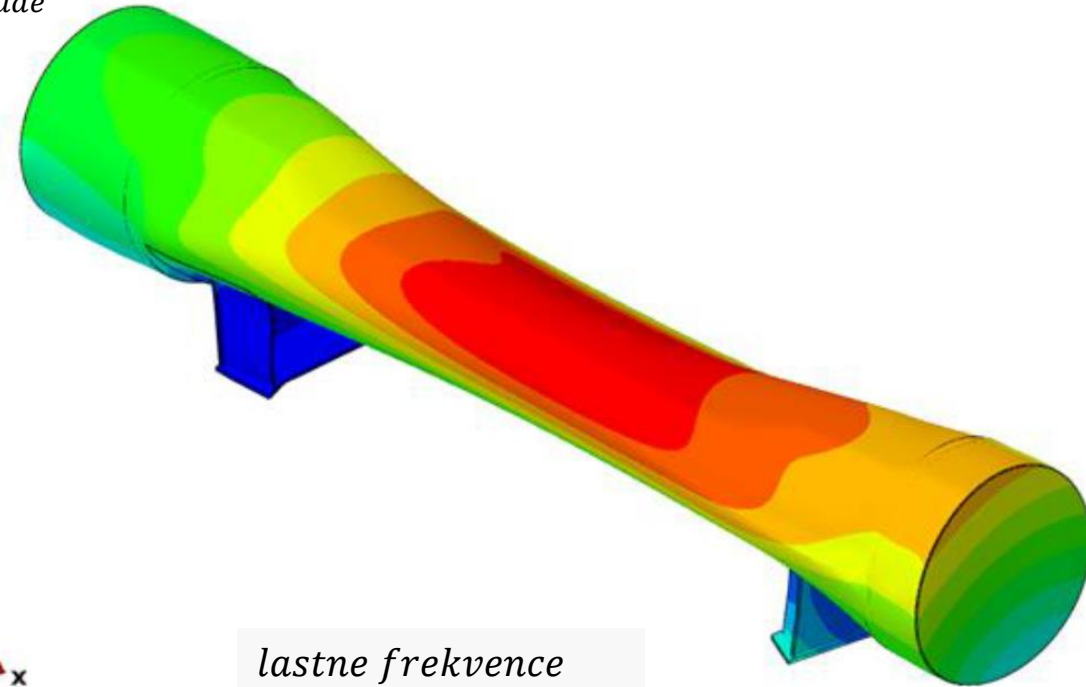
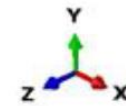
# Primeri uporabe MKE



## Modalna analiza



$u_{magnitude}$

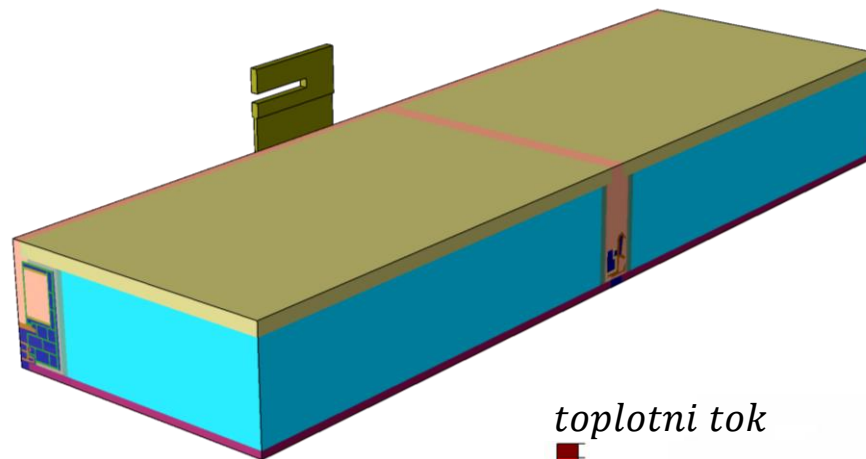
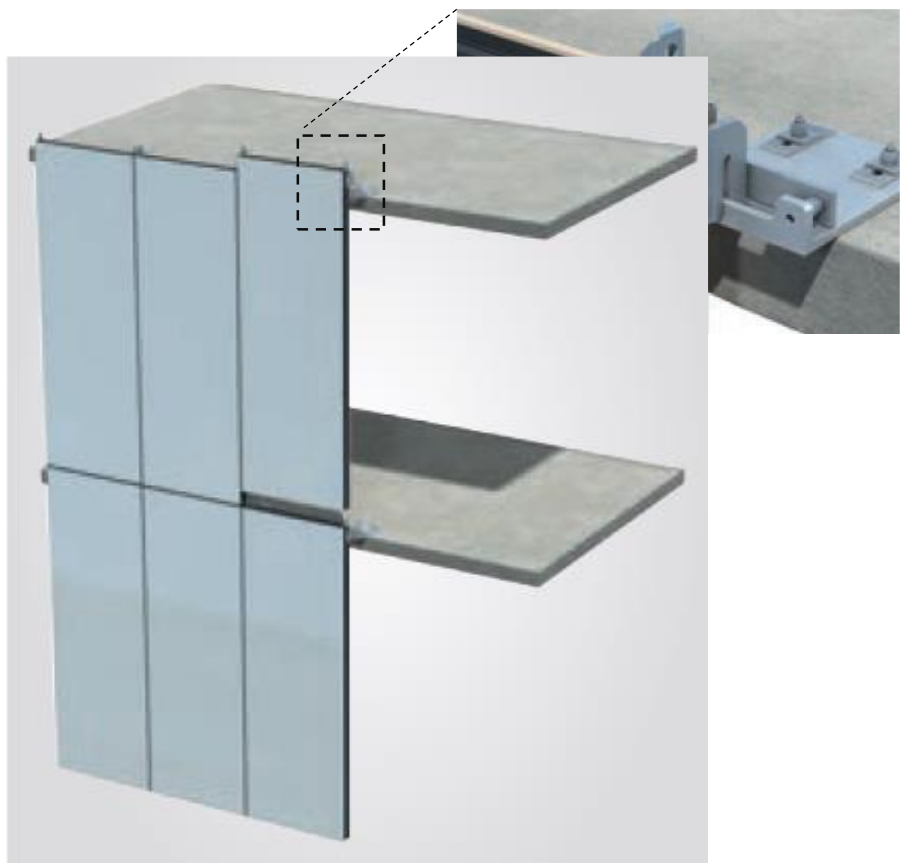


*lastne frekvence*  
*lastne oblike*

# Primeri uporabe MKE

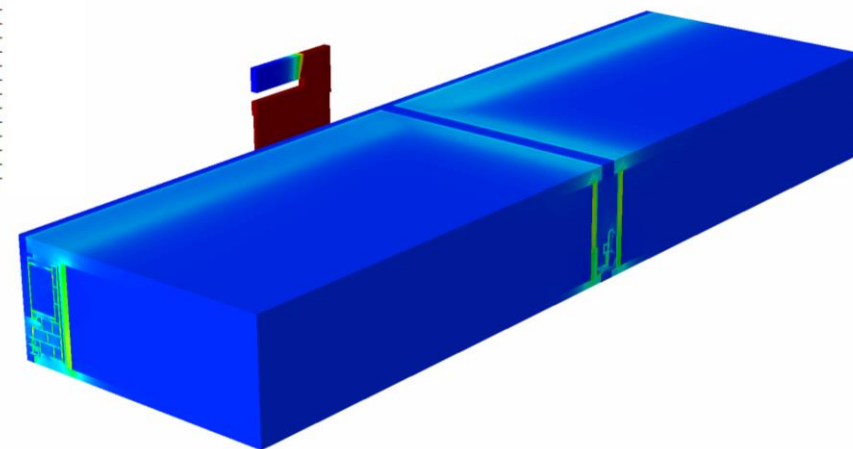


## Prevod toplote



*temperatura  
toplotni tok*

*toplotni tok*



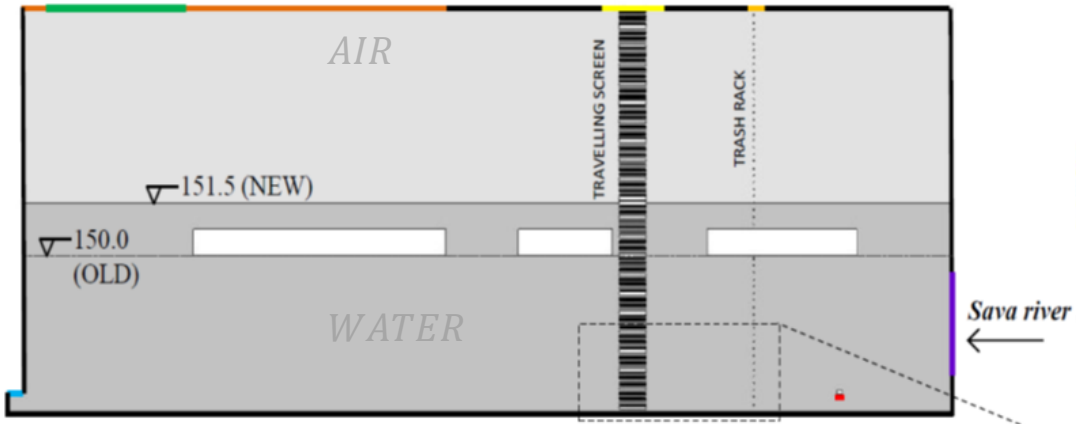


# Primeri uporabe MKE

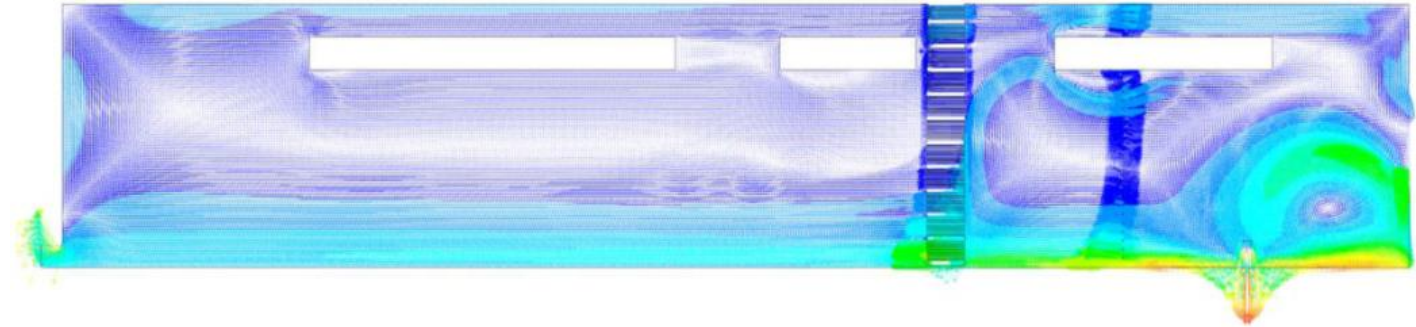


## Tranzientna termo-hidravlična analiza (Tok tekočin)

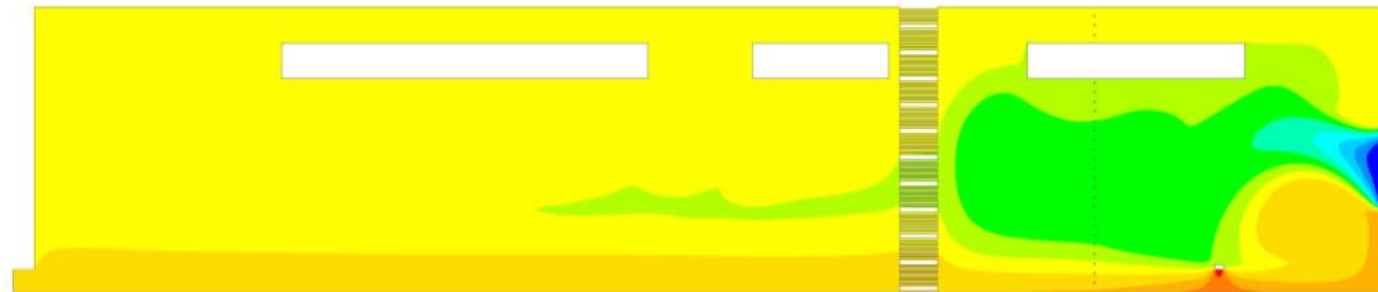
*WATER domain*



*velocity*



*Temperature*

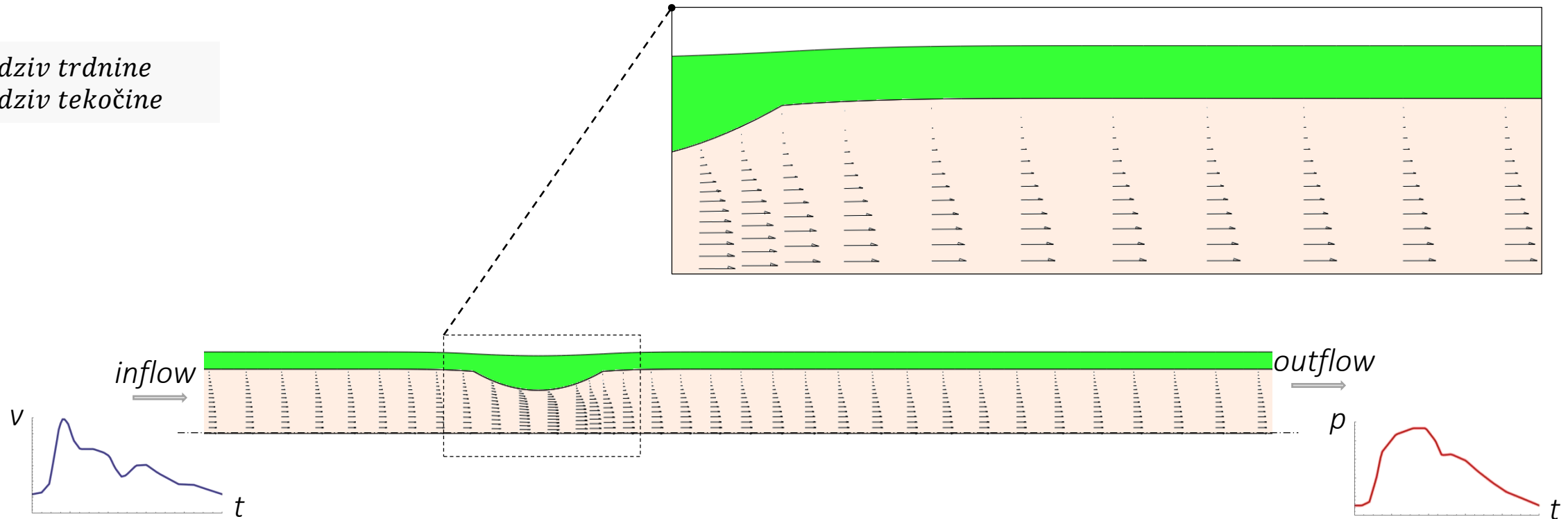


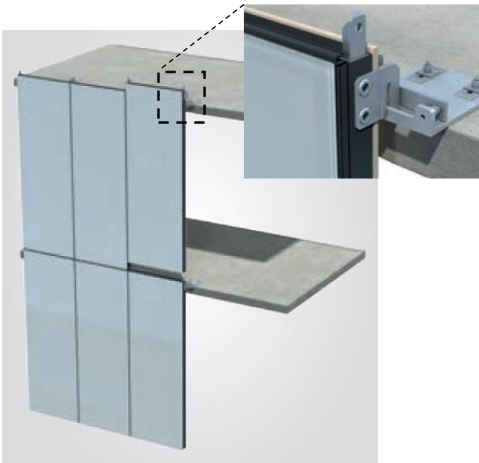
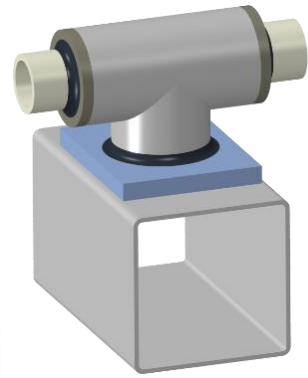
# Primeri uporabe MKE



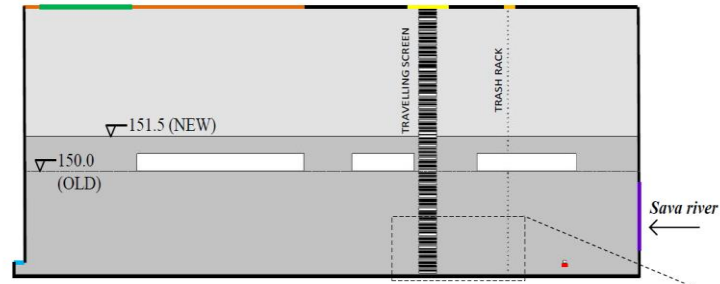
Sklopljeni problemi: Trdnina-Tekočina (angl. FSI simulations)

odziv trdnine  
odziv tekočine





analiza



# Koraki simulacije po MKE



1. Geometrija
  - geometrijske poenostavitve
  - redukcija razsežnosti (dimenzije)
2. Fizikalne lastnosti
  - snovne lastnosti
  - strukturne lastnosti
3. Geometrijska diskretizacija
  - tip elementov
  - mreženje
4. Vrsta analize
5. Obremenitve in Robni/Začetni pogoji
6. Predstavitev in analiza rezultatov

# Koraki simulacije po MKE



## 1. Geometrija

- geometrijske poenostavitve
- redukcija razsežnosti (dimenzije)

## 2. Fizikalne lastnosti

- snovne lastnosti
- strukturne lastnosti

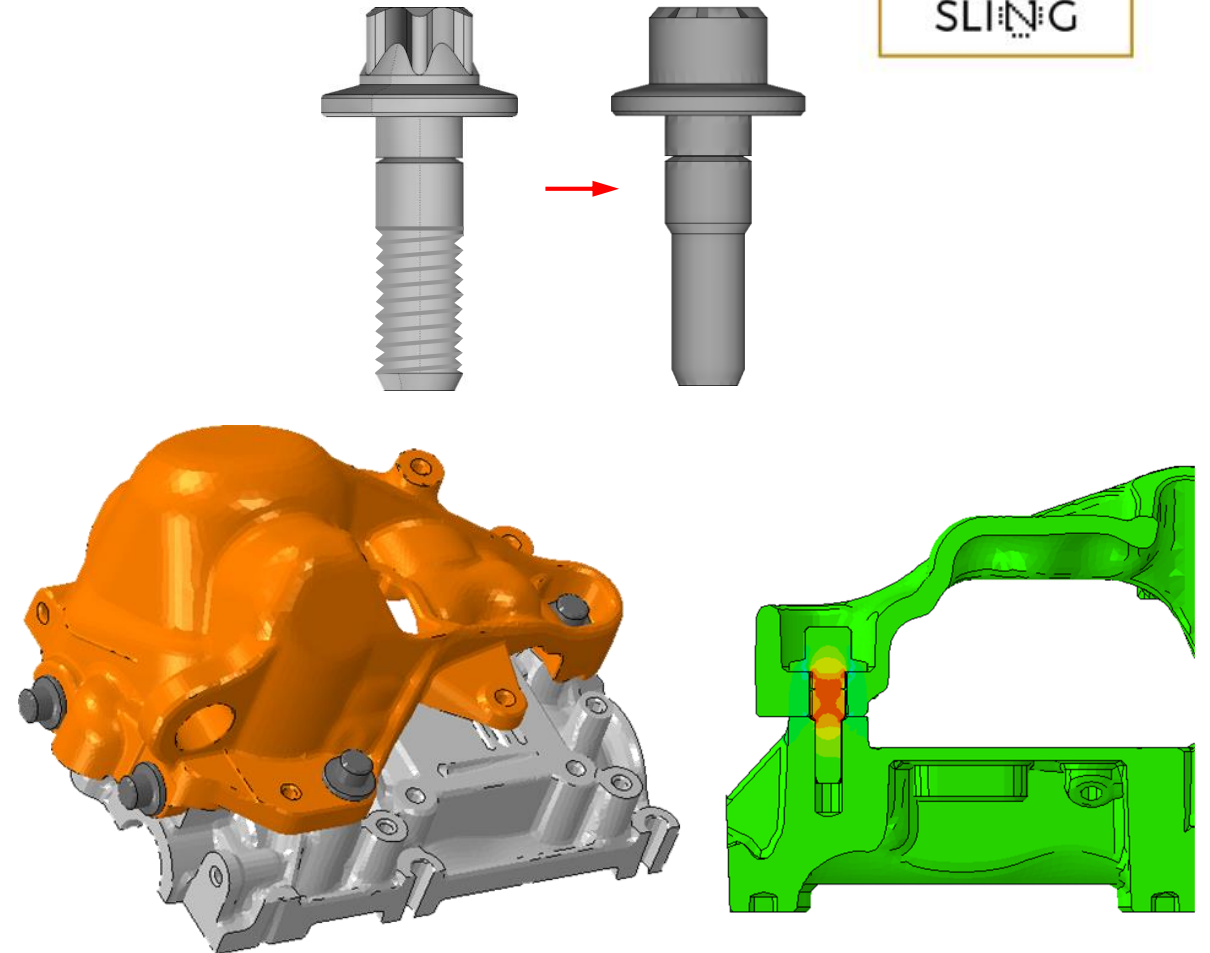
## 3. Geometrijska diskretizacija

- tip elementov
- mreženje

## 4. Vrsta analize

## 5. Obremenitve in Robni/Začetni pogoji

## 6. Predstavitev in analiza rezultatov



# Koraki simulacije po MKE



## 1. Geometrija

- geometrijske poenostavitve
- redukcija razsežnosti (dimenzije)

## 2. Fizikalne lastnosti

- snovne lastnosti
- strukturne lastnosti

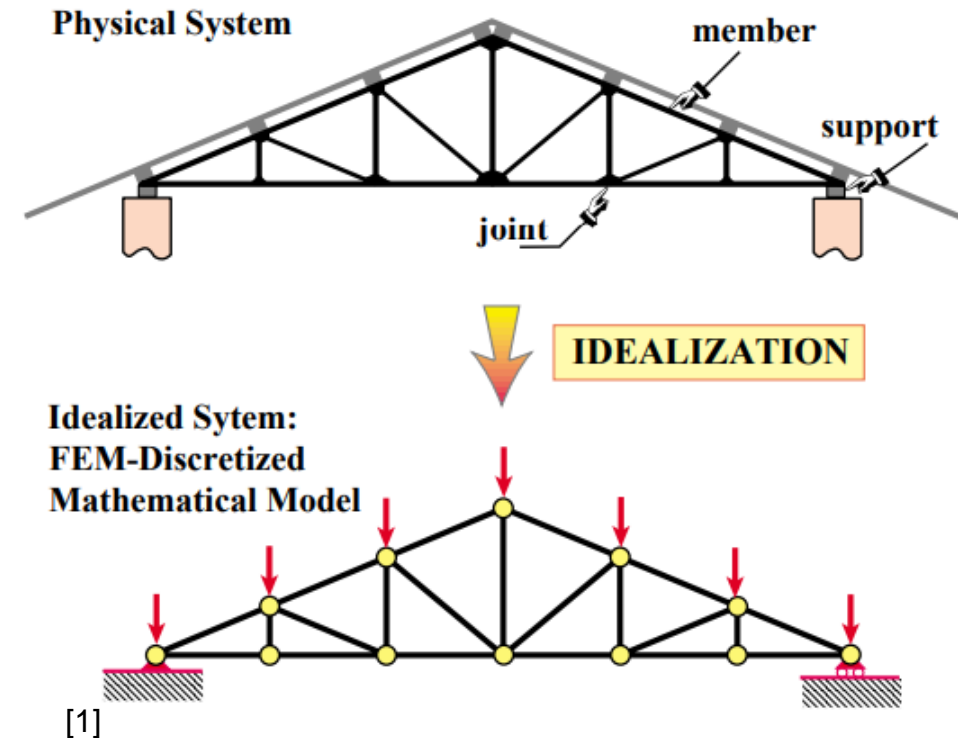
## 3. Geometrijska diskretizacija

- tip elementov
- mreženje

## 4. Vrsta analize

## 5. Obremenitve in Robni/Začetni pogoji

## 6. Predstavitev in analiza rezultatov

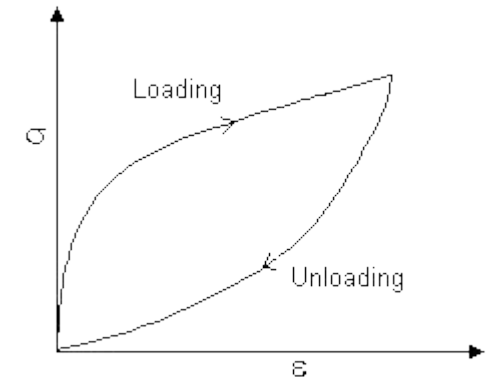
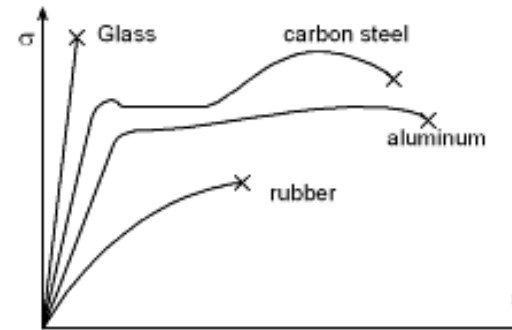




# Koraki simulacije po MKE



1. Geometrija
  - geometrijske poenostavitve
  - redukcija razsežnosti (dimenzije)
2. **Fizikalne lastnosti**
  - snovne lastnosti
  - strukturne lastnosti
3. Geometrijska diskretizacija
  - tip elementov
  - mreženje
4. Vrsta analize
5. Obremenitve in Robni/Začetni pogoji
6. Predstavitev in analiza rezultatov



# Koraki simulacije po MKE



## 1. Geometrija

- geometrijske poenostavitve
- redukcija razsežnosti (dimenzije)

## 2. Fizikalne lastnosti

- snovne lastnosti
- strukturne lastnosti

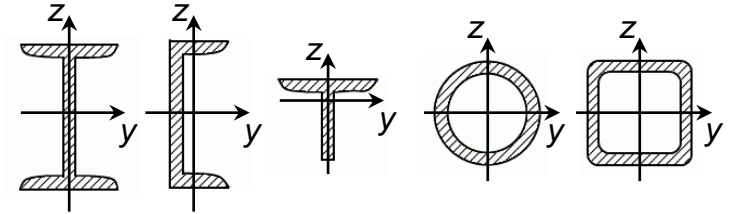
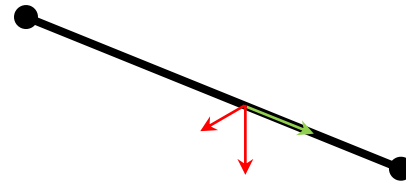
## 3. Geometrijska diskretizacija

- tip elementov
- mreženje

## 4. Vrsta analize

## 5. Obremenitve in Robni/Začetni pogoji

## 6. Predstavitev in analiza rezultatov





# Koraki simulacije po MKE



## 1. Geometrija

- geometrijske poenostavitve
- redukcija razsežnosti (dimenzije)

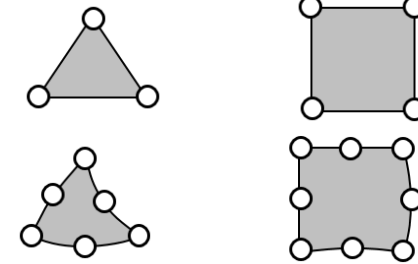


## 2. Fizikalne lastnosti

- snovne lastnosti
- strukturne lastnosti

## 3. Geometrijska diskretizacija

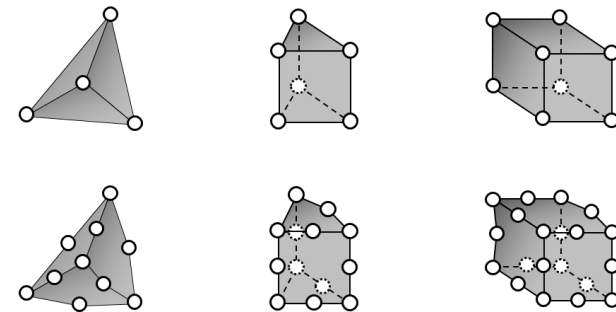
- tip elementov
- mreženje



## 4. Vrsta analize

## 5. Obremenitve in Robni/Začetni pogoji

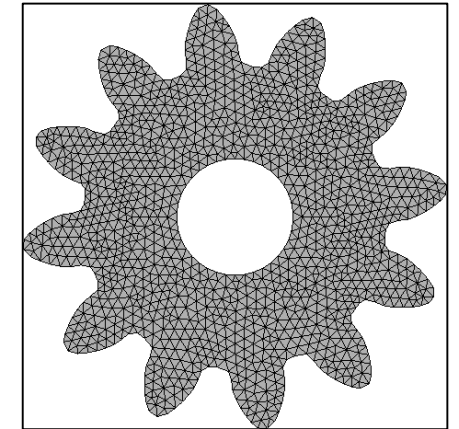
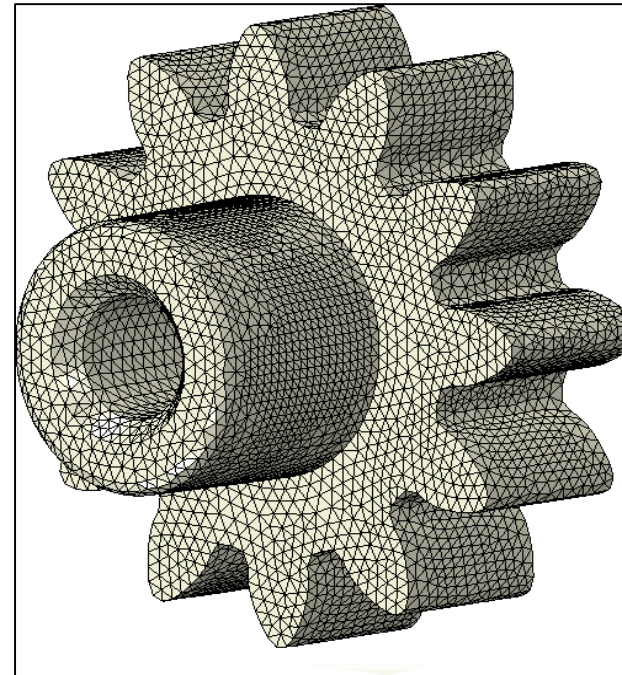
## 6. Predstavitev in analiza rezultatov



# Koraki simulacije po MKE



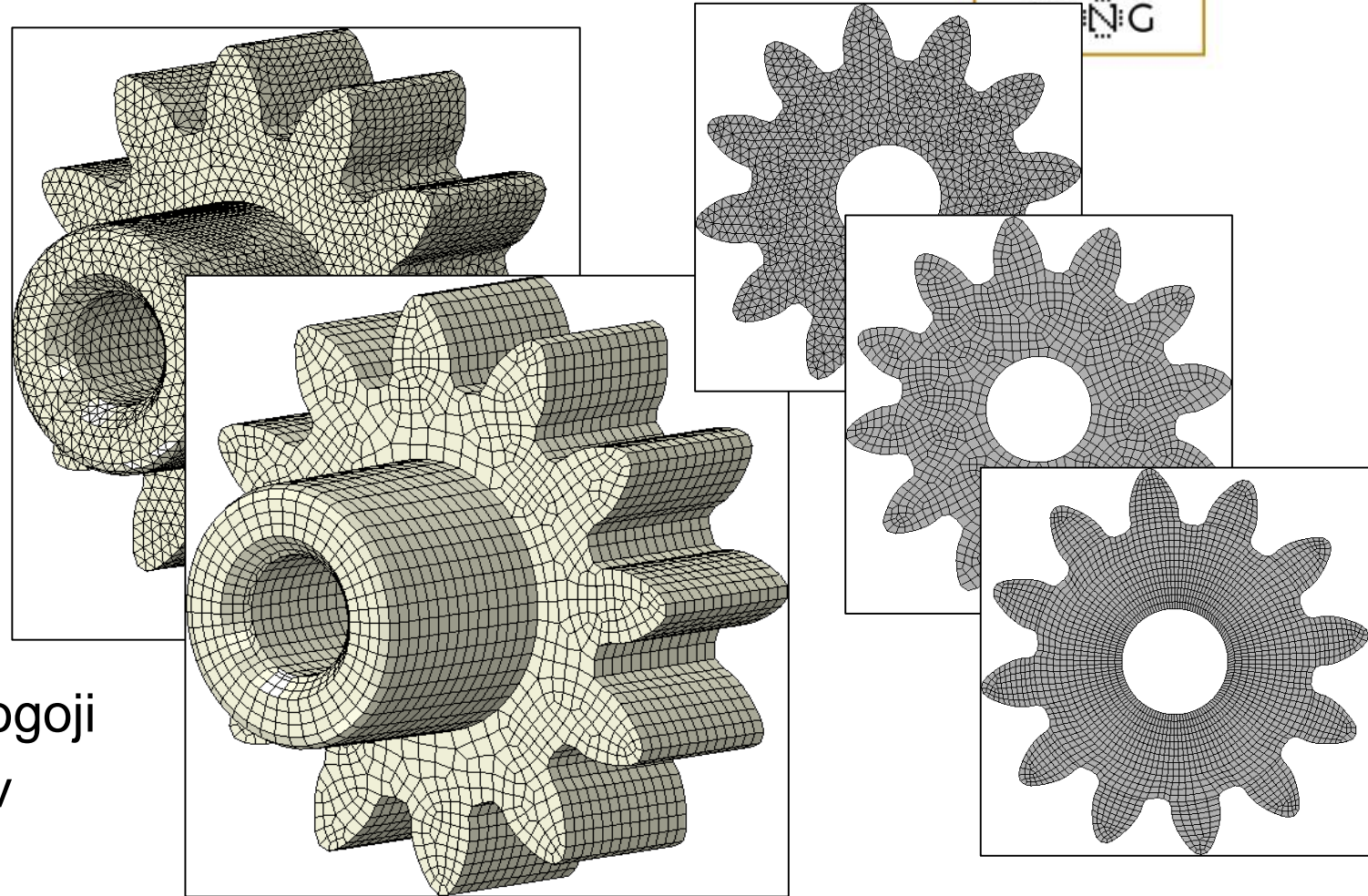
1. Geometrija
  - geometrijske poenostavitve
  - redukcija razsežnosti (dimenzije)
2. Fizikalne lastnosti
  - snovne lastnosti
  - strukturne lastnosti
- 3. Geometrijska diskretizacija**
  - tip elementov
  - mreženje
4. Vrsta analize
5. Obremenitve in Robni/Začetni pogoji
6. Predstavitev in analiza rezultatov



# Koraki simulacije po MKE



1. Geometrija
  - geometrijske poenostavitve
  - redukcija razsežnosti (dimenzije)
2. Fizikalne lastnosti
  - snovne lastnosti
  - strukturne lastnosti
3. **Geometrijska diskretizacija**
  - tip elementov
  - mreženje
4. Vrsta analize
5. Obremenitve in Robni/Začetni pogoji
6. Predstavitev in analiza rezultatov



# Koraki simulacije po MKE



## 1. Geometrija

- geometrijske poenostavitve
- redukcija razsežnosti (dimenzije)

## 2. Fizikalne lastnosti

- snovne lastnosti
- strukturne lastnosti

## 3. Geometrijska diskretizacija

- tip elementov
- mreženje

## 4. Vrsta analize

## 5. Obremenitve in Robni/Začetni pogoji

## 6. Predstavitev in analiza rezultatov

### • Statična

- Linearne

### • Dinamična

- Nelinearne

#### • Implicitna

#### • Eksplicitna

### • Časovno-odvisna statična

### • Prevod toplote

#### • Časovno-ustaljen

#### • Prehoden

### • Sklopljene analize

### • Uklonske

### • Elektromagnetizem

### • Tok tekočin



# Koraki simulacije po MKE



1. Geometrija
  - geometrijske poenostavitve
  - redukcija razsežnosti (dimenzije)
2. Fizikalne lastnosti
  - snovne lastnosti
  - strukturne lastnosti
3. Geometrijska diskretizacija
  - tip elementov
  - mreženje
4. Vrsta analize
- 5. Obremenitve in Robni/Začetni pogoji**
6. Predstavitev in analiza rezultatov

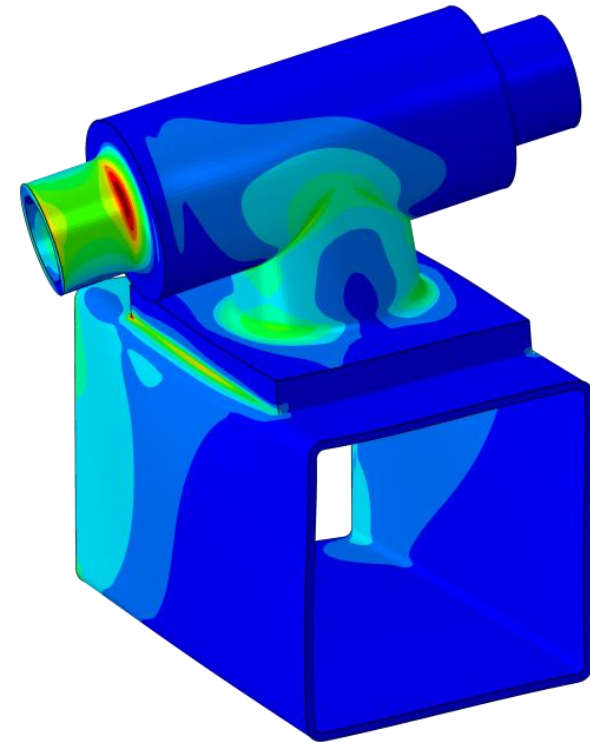
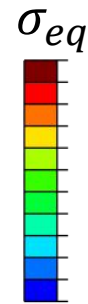


[1]

# Koraki simulacije po MKE



1. Geometrija
  - geometrijske poenostavitve
  - redukcija razsežnosti (dimenzije)
2. Fizikalne lastnosti
  - snovne lastnosti
  - strukturne lastnosti
3. Geometrijska diskretizacija
  - tip elementov
  - mreženje
4. Vrsta analize
5. Obremenitve in Robni/Začetni pogoji
6. **Predstavitev in analiza rezultatov**



# Izvedba analiz po MKE

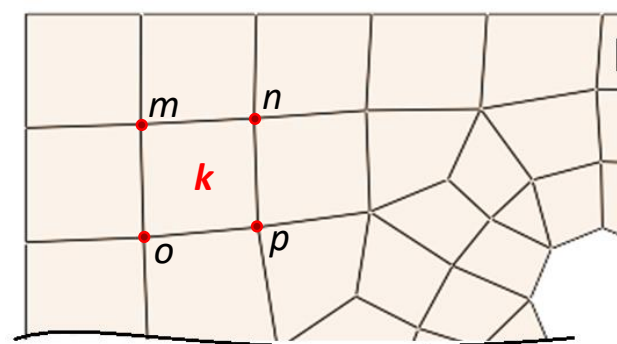


- Geometrija
- Seti
- Materialno obnašanje
- Vrsta analize
- Način reševanja (solver type)
- Obremenitve, Robni/Začetni pogoji
- Izhod/Rezultat

# Izvedba analiz po MKE



- **Geometrija**
- Seti
- Materialno obnašanje
- Vrsta analize
- Način reševanja (solver type)
- Obremenitve, Robni/Začetni pogoji
- Izhod/Rezultat



*Node		
1,	10.,	5.
2,	-25.,	5.
3,	-25.,	-15.
4,	15.,	-15.
5,	15.,	0.
6,	15.,	10.
7,	15.,	25.
8,	-25.,	25.
9,	55.,	5.
10,	20.,	5.

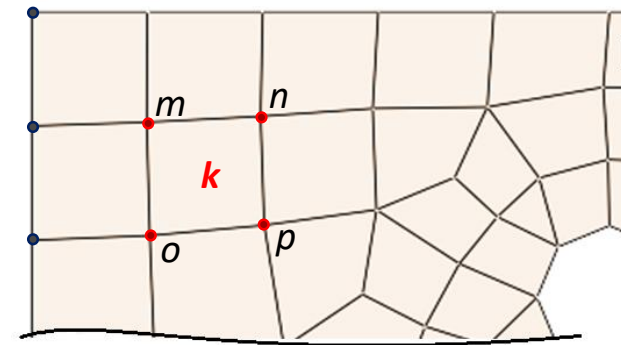
*Element, type=CPS8				
1,	675,	708,	644,	1235
2,	602,	131,	132,	589
3,	123,	646,	672,	122
4,	116,	608,	607,	115
5,	595,	108,	109,	643
6,	112,	584,	597,	111
7,	575,	78,	79,	576
8,	536,	574,	575,	537



# Izvedba analiz po MKE



- Geometrija
- **Seti**
- Materialno obnašanje
- Vrsta analize
- Način reševanja (solver type)
- Obremenitve, Robni/Začetni pogoji
- Izhod/Rezultat



```
*Nset, nset=Load  
2, 3, 8, 57, 58, 59, 60, 61,  
221, 222, 223, 224, 225, 226, 4091, 4094,
```

```
*Elset, elset=steel  
20, 21, 22, 82, 90, 100, 101, 102,  
1148, 1149, 1150, 1154, 1155
```

# Izvedba analiz po MKE



- Geometrija
- Seti
- **Materialno obnašanje**
- Vrsta analize
- Način reševanja (solver type)
- Obremenitve, Robni/Začetni pogoji
- Izhod/Rezultat

```
*Material, name=Steel
*Elastic
2.1e+08, 0.3
*Plastic
284000., 0.
300000., 0.01
310000., 0.02
350000., 0.03
400000., 0.05
```

```
*Material, name=Membrane
*Expansion
0.00016,
*Hyperelastic, moduli=LONG TERM
7e+06, 5e+06, 1e-09
*Viscoelastic, time=PRONY
0.9, 0., 6300.
```

```
SUBROUTINE UHYPER(BI1,BI2,AJ,U,UI1,UI2,UI3,TEMP,NOEL,
1 CMNAME,INCMPLAG,NUMSTATEV,STATEV,NUMFIELDV,FIELDV,
2 FIELDVINC,NUMPROPS,PROPS)
C
C INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
CHARACTER*80 CMNAME
DIMENSION U(2),UI1(3),UI2(6),UI3(6),STATEV(*),FIELDV(*),
2 FIELDVINC(*),PROPS(*)
real*8 ac, bc, E
C
ac=props(1)
bc=props(2)
E=2.71828182845905
C
U(1)=(ac*(-1. + E**((bc*(-3. + BI1))/2.)))/bc
C
UI1(1)=(ac*E**((bc*(-3. + BI1))/2.))/2.
UI1(2)=0.
UI1(3)=0.
C
UI2(1)=(ac*bc*E**((bc*(-3. + BI1))/2.))/4.
UI2(2)=0.
UI2(3)=0.
UI2(4)=0.
UI2(5)=0.
UI2(6)=0.
C
UI3(1)=0.
UI3(2)=0.
UI3(3)=0.
UI3(4)=0.
UI3(5)=0.
UI3(6)=0.
C
RETURN
END
```

# Izvedba analiz po MKE



- Geometrija
- Seti
- Materialno obnašanje
- **Vrsta analize**
- **Način reševanja (solver type)**
- Obremenitve, Robni/Začetni pogoji
- Izhod/Rezultat

Statična, Dinamična (Implicitna, Eksplicitna),  
Prevod toplote, Sklopljeni problemi,  
Linearna/Nelinearna

...

Reševanje sistema enačb  
Tehnike reševanja  
Inkrementacija  
Toleranca konvergence

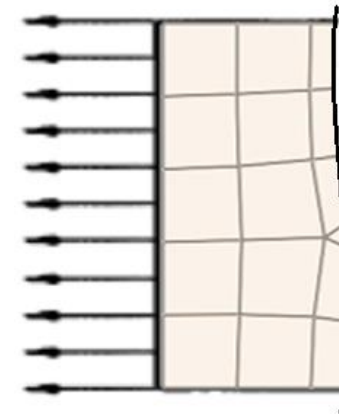
...

# Izvedba analiz po MKE



- Geometrija
- Seti
- Materialno obnašanje
- Vrsta analize
- Način reševanja (solver type)
- **Obremenitve, Robni/Začetni pogoji**
- Izhod/Rezultat

```
*Boundary, op=NEW  
edge_L, 3, 3  
*Boundary, op=NEW  
edge_R, 3, 3  
*Dload, op=NEW  
inner, P, 13.9988
```



# Izvedba analiz po MKE



- Geometrija
- Seti
- Materialno obnašanje
- Vrsta analize
- Način reševanja (solver type)
- Obremenitve, Robni/Začetni pogoji
- **Izhod/Rezultat**

```
*Output, field
*Node Output
CF, COORD, RF, U
*Element Output, directions=YES
LE, P, PE, PEEQ, PEMAG, S, TEMP
*Output, history
*Node Output, nset=u6
COOR1, COOR2, COOR3
```



# Hvala za pozornost!



This project has received funding from the European High-Performance Computing Joint Undertaking (JU) under grant agreement No 951732. The JU receives support from the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme and Germany, Bulgaria, Austria, Croatia, Cyprus, Czech Republic, Denmark, Estonia, Finland, Greece, Hungary, Ireland, Italy, Lithuania, Latvia, Poland, Portugal, Romania, Slovenia, Spain, Sweden, United Kingdom, France, Netherlands, Belgium, Luxembourg, Slovakia, Norway, Switzerland, Turkey, Republic of North Macedonia, Iceland, Montenegro



**EuroHPC**  
Joint Undertaking